数学分析I

> 由于水平有限,加之对笔记的理解和挖掘在一定程度上不够充分,错误在所难免,敬请各位读者补充和斧正
>
> *Edited by Stellaria*

数列极限

> 数列极限作为数学分析的开头起着至关重要的作用,极限是数学分析中的重要基石

Example1:

$$\text{计算：}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+...+n!}{n!}$$

◁

$$1\le\frac{1!+2!+...+n!}{n!}<\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}=\frac{n-2}{(n-1)n}+\frac{1}{n}+1$$

$$\text{根据 夹逼定理 可知}\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+...+n!}{n!}=1$$

▷

Example2:

$$\text{计算：}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times(2n)}}$$

◁

$$1>\frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times(2n)}>\frac{1}{2n}\qquad(\frac{n}{n-1}>1)$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}<\sqrt[n]{\frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times(2n)}}<1$$

$$\text{根据 夹逼定理 可知}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times(2n)}}=1$$

▷

Example3:

$$\text{证明：}\quad \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n})=\ln 2$$

◁

$$我们知道：\quad \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\alpha_n \quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$$

$$令该等式中\ n\ =2n \quad 可以得到：\quad \sum_{n=1}^{2n}\frac{1}{n}=\ln 2n+\gamma+\alpha_{2n}$$

$$上述两个等式相减,可以得到：\quad \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\ln 2+\alpha_{2n}-\alpha_n \quad 等式左右取极限即可$$

▷

Cauthy Theorem:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a$$

◁

$$由\quad \lim_{n\to\infty}a_n=a \quad 有 \quad \forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,N_1 \quad \forall\,n>N_1:|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-a|=|\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots+a_n-a}{n}|$$

$$<|\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots a_{N_1}-a}{n}|+|\frac{a_{N_1+1}-a+\ldots a_n-a}{n}|$$

$$<|\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots a_{N_1}-a}{n}|+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<|\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots a_{N_1}-a}{n}|+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$又因为\quad a_1-a+a_2-a+\ldots+a_{N_1}-a \quad 是一个确定的常数,记作\ C\ 我们知道\ \lim_{n\to\infty}\frac{C}{n}=0$$

$$故有\quad \forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,N_1 \quad \forall\,n>N_2:|\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots a_{N_1}-a}{n}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$最后我们取\ N=\max(N_1,N_2)\ 即可得\ |\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-a|<\varepsilon$$

▷

柯西定理的证明十分有意思,初学者需要理解掌握,是一种用定义来分段证明极限的方法

Example4:

$$计算：\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$$

◁

$$0<\sqrt[n]{\frac{1}{n}!}\le\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}}{n} \quad 由柯西定理可只不等号右端的式子极限为0,根据夹逼定理原极限为0$$

▷

Example5:

$$证明：\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$$

◁

由上题可以直接得证,这里给出另一种方法：

$$e^n > 1 + n + \frac{1}{2!}n^2 + \ldots \frac{1}{n!}n^n > \frac{n^n}{n!} \Rightarrow n! > \frac{n^n}{e^n} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} > \frac{n}{e} \to +\infty \quad as \quad n \to \infty$$

▷

Corollary:

$$设 \quad a_n > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \quad 则有 \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \quad 下面的引理即证明$$

Lemma:

$$设 \quad a_n > 0 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 则有 \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \quad 请读者自证$$

Example:

$$计算： \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

◁

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \quad 根据上题的推论可以得到 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} \quad 故原\text{木}$$

▷

有用的放缩不等式:

$$a^n > \frac{(a-1)^2}{4} n^2 \quad (a可以是任何大于1的数或式)$$

Example6:

$$用 \ \varepsilon - N \ 语言证明： \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

◁

$$|\sqrt[n]{n^k} - 1| = |\sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{n} \times \sqrt{n} \ldots \times \sqrt{n}}_{2k个} \underbrace{\times 1 \times 1 \ldots \times 1}_{n-2k个}} - 1| < \frac{2k\sqrt{n} + n - 2k}{n} - 1 = \frac{2k}{\sqrt{n}} - \frac{2k}{n} < \frac{2k}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow n > \frac{4k^2}{\varepsilon^2} \quad \forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, N = \max(2k, [\frac{4k^2}{\varepsilon}]) \quad \forall \, n > N : |\sqrt[n]{n^k} - 1| < \varepsilon$$

▷

Example7:

$$设 \quad x_n \geq 0 \quad 且 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \geq 0 \quad 证明： \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$$

◁

$$\text{法一：}\qquad |\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|<\sqrt{|x_n-a|}\iff(\sqrt{x_n}-\sqrt{a})^2<(\sqrt{x_n}-\sqrt{a})(\sqrt{x_n}+\sqrt{a})<|x-a|$$

$$\text{法二：}\qquad |\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|=|\frac{x_n-a}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}|<\frac{1}{\sqrt{a}}|x_n-a|$$

▷

Example8:

$$\text{计算：}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

◁

$$0<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{(2n-1)!!}{\sqrt{1\times3}\times\sqrt{3\times5}\times\ldots\times\sqrt{(2n-1)\times(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

▷

Example9:

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n\quad \text{证明 } x_{n+1}>x_n \quad \text{且 } x_n \text{ 上有界}$$

◁

$$x_n=\overbrace{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\ldots(1+\frac{1}{n})}^{n\text{个}}\times1<(\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1})^{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=x_{n+1}$$
$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}<3$$

▷

Important Identity:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}\quad(\frac{n}{n+1}<\theta_n<1)$$

Example:

$$\text{计算：}\quad \lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$$

◁

$$\text{根据上述恒等式有：}n\sin\left(2\pi\frac{1}{n+1}\right)<n\sin(2\pi n!e)<n\sin\left(2\pi\frac{1}{n}\right)$$

▷

Example10:

$$\text{证明：}\quad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\ldots(1+\frac{n}{n^2})=e^{\frac{1}{2}}$$

◁

$$\text{易知}\quad (1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\dots(1+\frac{n}{n^2}) = e^{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)} \qquad \frac{1}{n^2+n}\times k < \frac{k}{n^2+k} < \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

$$\text{对第二个不等式求和可以得到：}\quad \frac{1}{n^2+n}\times\frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{根据夹逼定理容易得到：}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{取自然对数即可}$$

▷

Example11:

$$\text{计算：}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)$$

◁

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1} < \sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1 = \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} < \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$\text{对不等式进行求和} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}\times\frac{n(n+1)}{2n^2} < \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1) < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\times\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\text{根据夹逼定理容易得到：}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1) = \frac{1}{4}$$

▷

数列极限到此为止,读者千万不能把重点放在求各种数列极限中,理解极限和定理才是这一章的关键,过分追求各种技巧对于数学分析的学习反而事倍功半

函数极限与连续

Important limit:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Proposition1:

$$\text{设}\quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0 \quad \lim_{x\to x_0}\beta(x) = 0 \quad \text{且}\ \alpha(x)\neq\beta(x) \quad \text{那么有}$$

$$\begin{aligned}
&1.\quad \sin(\alpha(x)) - \sin(\beta(x)) \sim \alpha(x) - \beta(x)\\
&2.\quad \tan(\alpha(x)) - \tan(\beta(x)) \sim \alpha(x) - \beta(x)\\
&3.\quad e^{\alpha(x)} - e^{\beta(x)} \sim \alpha(x) - \beta(x)
\end{aligned}$$

◁

$$1.\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)-\sin\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\cos\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{2}\sin\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{2}}{\alpha(x)-\beta(x)}=1$$

$$2.\quad 由\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad 容易证明$$

$$3.\ \lim_{x\to x_0}\frac{e^{\alpha(x)}-e^{\beta(x)}}{\alpha(x)-\beta(x)}=\frac{e^{\beta(x)}(e^{\alpha(x)-\beta(x)}-1)}{\alpha(x)-\beta(x)}=1$$

▷

Proposition2:

$$设\quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=1\quad \lim_{x\to x_0}\beta(x)=1\quad 且\ \alpha(x)\neq\beta(x)\quad 那么有$$

$$1.\quad \alpha^k(x)-\beta^k(x)\sim k\times[\alpha(x)-\beta(x)]\quad k\in\mathbb{N}^*$$

$$2.\quad \alpha^{\frac{1}{k}}(x)-\beta^{\frac{1}{k}}(x)\sim\frac{1}{k}\times[\alpha(x)-\beta(x)]\quad k\in\mathbb{N}^*$$

$$3.\quad \ln\alpha(x)-\ln\beta(x)\sim\alpha(x)-\beta(x)$$

Example1:

$$计算：\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}-1}{\ln\cos 3x}$$

◁

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}-1}{\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3}{\cos x-1}$$

$$=1+\frac{1}{2}\times\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}+\frac{1}{3}\times\frac{\cos 3x-1}{\cos x-1}=1+\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{3}\times 9=6$$

$$经过归纳我们可以得到：\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sqrt{cos2x}\dots\sqrt[n]{\cos nx}-1}{\ln cosx}=\frac{n(n+1)}{2}\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

▷

Example2:

$$计算：\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$$

◁

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+3x^4)^2]^{\frac{1}{10}}-[(1-2x)^5]^{\frac{1}{10}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}[1-(1+x)^{\frac{1}{6}}]}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{10}[(1+3x^4)^2-(1-2x)^5}{-\frac{1}{6}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{10}(10x+o(x))}{-\frac{1}{6}x}=-6$$

▷

Example3:

$$计算：\quad \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}\qquad (1^\infty)$$

◁

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\frac{1}{2}x^3} = -\frac{1}{3} \quad 因此原极限 = e^{-\frac{1}{3}}$$

▷

Example4:

$$计算： \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}$$

◁

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+x\sin x}-1}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}} - \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\frac{1}{6}x\sin x}{-\frac{1}{6}(\cos x-1)} - \frac{\frac{1}{2}(\cos x-1)}{-\frac{1}{6}(\cos x-1)}) = 5$$

▷

Example5:

$$计算： \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$

◁

$$\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x} = \frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x} + \frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan(\tan x)\tan(\sin x))(\tan(\tan x-\sin x))}{\tan x-\sin x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x} = 1 \quad 故原极限 = 2$$

▷

Example1:

$$设\ f(x) = (\sin x)^2 + \sin^2 x \quad x\in\mathbb{R} \quad 证明： \quad f(x)\ 不是周期函数$$

◁

因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 但不一致连续, 根据引理的逆否命题就可证明

Lemma：设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 连续的周期函数, 则 $f(x)$ 一致连续

▷

Example2:

证明：设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 满足 *Lipschitz* 条件 即 $\exists\, M>0: |f(x_1)-f(x_2)| = M|x_1-x_2|$
则 $f(\sqrt{x})$ 在$[0,+\infty)$一致连续

◁

$$|f(\sqrt{x_1})-f(\sqrt{x_2})| \le M|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| \le M\sqrt{|x_1-x_2|}$$

▷

Example3:

设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 一致连续 $\phi(x)$ 在$[a,+\infty)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\phi(x)]=0$
证明：$\phi(x)$ 在$[a,+\infty)$ 一致连续

◁

令 $F(x)=f(x)-\phi(x)$ $F(x)$ 在$[a,+\infty]$ 连续 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$ 所以$F(x)$在 $[a,+\infty)$ 上一致连续
所以 $\phi(x)=F(x)-f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续

▷

函数极限到此为止,同上一章一样,把重心放在理解定理和函数极限上

微分学

> 微分学是建立在极限基础上的数学分析*I*的另一大重点

导数

Example1:

$$f(x)=|x| \quad 在\ x=0\ 处不可导$$

◁

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x} \quad 左右极限不同, 故极限不存在, 所以不可导$$

▷

Corollary:

设 $f(x)\in\mathbb{C}(-1,1)$ $f(0)=0$ $f'(0)$ 存在. 则有： $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})=\frac{f'(0)}{2}$

进一步地, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac{k^{i-1}}{n^i})=\frac{1}{i}f'(0) \quad i\in\mathbb{N}^*$

◁

$$\text{这里只给出 } i=2 \text{ 的情况,其余情况请读者自行归纳证明}$$

$$\text{设 } f'(0) = A = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \quad \text{根据极限的 } \varepsilon-\delta \text{ 定义}:\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \quad |x|<\delta: |\frac{f(x)}{x}-A|$$

$$\Rightarrow A-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<A+\varepsilon \quad \text{取 } \frac{1}{N}<\delta(N>\frac{1}{\delta}) \quad \text{当 } n>N \text{ 时}: 0<\frac{1}{n^2}<\frac{2}{n^2}<\frac{n}{n^2}<\frac{1}{N}$$

$$\text{即} \quad 0<\frac{k}{n^2}<\delta \Rightarrow (A-\varepsilon)\frac{k}{n^2}<f(\frac{k}{n^2})<(A+\varepsilon)\frac{k}{n^2} \Rightarrow (A-\varepsilon)\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}<\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})<(A+\varepsilon$$

$$\text{将不等式取极限可以得到}: \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})=\frac{A}{2}=\frac{f'(0)}{2}$$

▷

微分中值定理

Darboux Theorem:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 可导}, f'(a)\neq f'(b), \mu \text{ 是介于 } f'(a), f'(b) \text{ 之间任意实数, 即 } f'(a)<\mu<f'(b)$$
$$\text{则存在 } \xi \in (a,b): f'(\xi)=\mu$$

Rolle Theorem:

$$\text{设 } f(x) \in \mathbb{C}[a,b], \text{且在 } (a,b) \text{ 可导}, f(a)=f(x_1)=f(x_2)=\ldots f(x_i)=f(b) \quad (x_i\in(a,b))$$
$$\text{则存在 } \xi \in (a,b): f^{(i+1)}(\xi)=0$$

Example1:

$$\text{设 } f(x) \in \mathbb{C}[0,4], \text{在 } [0,4] \text{ 二阶可导}, f(0)=0, f(1)=1, f(4)=2 \quad \text{证明}: \quad \text{存在 } \xi: f''(\xi)=-\frac{1}{3}$$

◁

$$\text{考虑函数 } F(x)=f(x)-p(x) \quad p(x)=ax^2+bx+c: p(0)=0, p(1)=1, p(4)=2$$
$$\text{容易得到多项式}p(x)\text{的表达式, 又因为 } F(0)=F(1)=F(4) \quad \text{根据 } Rolle \text{ 定理即可证明}$$

▷

Lagrange Mean Theorem:

Example2:

$$n>1 \quad s>0 \quad 1^s+2^s+\ldots+n^s=\phi(n) \quad \text{则成立}: \quad \frac{n^{s+1}}{s+1}<\phi(n)<\frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}$$

◁

$$\text{令 } f(x)=x^{s+1} \quad \text{在 } [k,k+1] \text{ 由 } Lagrange \text{ 中值定理可得}: \quad (k+1)^{s+1}-k^{s+1}=(s+1)\xi^s \quad (\xi\in($$
$$\text{由上式可得}: \quad (s+1)\times k^s<(k+1)^{s+1}-k^{s+1}<(s+1)\times(k+1)^s$$
$$\text{对上述两个不等式进行求和即得到答案}$$

▷

Example3:

设 $f(x)\ \in \mathbb{C}[a,b]$ 在(a,b)可导 $a>0$ 证明： 存在 $\xi\ ,\eta\in(a,b):f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

◁

$$\text{根据 } Lagrange \text{ 中值定理可得：} \quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \quad \xi\in(a,b)$$
$$\text{根据 } Cauthy \text{ 中值定理可得：} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta} \quad \eta\in(a,b)$$
$$\text{两式相除即可}$$

▷

Example4:

设 $f(x)\ \in \mathbb{C}[a,b]$, 且在$(a,b)$ 二阶可导 证明： 存在 $\xi\in(a,b):f(a)-2f(\dfrac{a+b}{2})+f(b)=\dfrac{(b-c}{4}$

◁

$$\text{法一：令 } p(x)=\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}f(\frac{a+b}{2})+\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-a)}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}f$$
$$p(a)=f(a),p(b)=f(b),p(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})$$

令 $F(x)=f(x)-p(x)$ $F(a)=F(\dfrac{a+b}{2})=F(b)=0$ 根据 $Rolle$ 定理： 存在 $\xi\ \in(a,b):F''($

$$\text{代入计算即可}$$

法二： 根据 $Cauthy$ 中值定理： 令 $F(x)=f(a)-2f(\dfrac{a+x}{2})+f(x)$ $G(x)=(x-a)^2$

$$F(a)=0,G(a)=0 \quad \text{只需证 } \frac{F(b)}{G(b)}=\frac{1}{4}f''(\xi) \text{ 即可}$$
$$\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F''(\eta)}{G''(\eta)}=\frac{f'(\eta)-f'(\frac{a+\eta}{2})}{2(\eta-a)}=\frac{f''(\xi)\frac{a+b}{2}}{2(\eta-a)}=\frac{1}{4}f''(\xi)$$

▷

Example5:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶可导, 证明： 存在 $\xi\in(a,b):f(b)=f(a)+\dfrac{1}{2}(b-a)[f'(b)-f'(a)]-\dfrac{1}{12}(b-$

◁

$$\text{法一：令 } F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)[f'(x)-f'(a)] \quad G(x)=(x-a)^3$$
$$F(a)=F'(a)=0,F''(x)=-\frac{1}{2}(x-a)f'''(x),G(a)=G'(a)=0,G''(x)=6(x-a)$$
$$\text{根据 } Cauthy \text{ 中值定理有：} \frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F''(\xi)}{G''(\xi)}=-\frac{1}{12}f'''(\xi) \quad \text{代入移项即可}$$

$$\text{法二：构造 } F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & (x-a)^3 & (x-a)^2 & x-a & 1 \\ f(b) & (b-a)^3 & (b-a)^2 & b-a & 1 \\ f(a) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f'(b) & 3(b-a)^2 & 2(b-a) & 1 & 0 \\ f'(a) & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$F(a) = F(b) = 0 \quad \text{根据 } Rolle \text{ 定理：存在 } \eta \in (a,b) : F'(\eta) = 0$$

$$F'(a) = F'(b) = F'(\eta) = 0 \quad \text{同理：存在 } \xi \in (a,b) : F'''(\xi) = 0$$

根据行列式函数的求导法则即可得到结论，计算有点繁琐这里就不写出具体过程了

▷

Corollary1:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在} (a,+\infty) \text{ 可导，导数有界，则 } f(x) \text{ 在} (a,+\infty) \text{ 一致连续}$$

Corollary2:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在} (a,+\infty) \text{ 可导，且 } \lim_{x\to+\infty} |f'(x)| = +\infty \quad \text{则 } f(x) \text{ 一定不一致连续}$$

Corollary3:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在} (a,+\infty) \text{ 可导，且 } \lim_{x\to+\infty} f'(x) = A > 0 \quad \text{则 } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

凹凸性

$$I \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的区间，给定 } I \text{ 上定义实值函数 } f \text{ 那么下面的几个性质是等价的：}$$

$$1). \quad \text{对任意 } x, y \in I \quad \text{任意 } t \in [0,1], \text{有：} f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

$$2). \quad \text{对任意 } x, y, z \in I \quad \text{如果 } x < y < z, \text{那么：} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$$3). \quad \text{对任意 } x, y, z \in I \quad \text{如果 } x < y < z, \text{那么：} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \ge 0$$

Jensen Inequality

Example1:

$$\text{证明：} \quad \frac{3}{3+2} + \frac{3^2}{3^2+2} + \ldots + \frac{3^n}{3^n+2} > \frac{n^2}{n+1}$$

◁

$$\text{即证明：} \quad \frac{1}{1+\frac{2}{3}} + \frac{1}{1+\frac{2}{3^2}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{2}{3^n}} > \frac{n^2}{n+1}$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{1+x_k} \quad x_k = \frac{2}{3^k} \quad k = 1, 2, \ldots n \quad f(x)\text{是下凸函数}$$

$$\text{根据 } Jensen \text{ 不等式，可得：} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ge \frac{n}{1+\frac{1}{n}(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^n})} > \frac{n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n+1}$$

▷

Example2:

$$\text{证明：}\quad (a+b)e^{a+b} \le ae^{2a} + be^{2b} \quad (a>0, b>0)$$

◁

$$\text{令 } f(x) \ = e^{2x} \quad \lambda_1 = \frac{a}{a+b} \quad \lambda_2 = \frac{b}{a+b} \quad \text{根据 } Jensen \text{ 不等式可得：}$$

$$\frac{a}{a+b}e^{2a} + \frac{b}{a+b}e^{2b} \ge e^{2\frac{a^2+b^2}{a+b}} \Rightarrow ae^{2a} + be^{2b} \ge (a+b)e^{2\frac{a^2+b^2}{a+b}} \ge (a+b)e^{a+b}$$

▷

Example3:

证明： 设 $0<\alpha<\beta \quad a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ 则有： $(\dfrac{{a_1}^\alpha + {a_2}^\alpha + \ldots + {a_n}^\alpha}{n})^{\frac{1}{\alpha}} \le (\dfrac{{a_1}^\beta + {a_2}^\beta + \ldots}{n}$

◁

$$\text{令 } p = \frac{\beta}{\alpha} \ge 1, \quad x_1, \ldots, x_n > 0 \quad \text{根据 } Jensen \text{ 不等式：}$$

$(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n})^p \le \dfrac{{x_1}^p + {x_2}^p + \ldots + {x_n}^p}{n}$ 将 $x_1 = {a_1}^\alpha, \ldots, x_n = {a_n}^\alpha$ 代入上述不等式再开 β 次

▷

Example4:

$$\text{证明：}\quad (\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x} \quad (\text{其中 } 0 < x < \frac{\pi}{2})$$

◁

$$\text{令 } f(x) = \ln x \quad \text{取 } b = \cos x + \sin x \quad a = \sin x \quad t = \tan x \quad t \in (0,1)$$

$$\ln x \text{ 是上凸函数, 根据定义有：}\quad \ln(ta + (1-t)b) \ge t\ln a + (1-t)\ln b$$

$$\Rightarrow \ln\cos x \ge \tan x \ln\sin x + (1-\tan x)\ln(\cos x + \sin x)$$

$$\text{其中}(1-\tan x)\ln(\cos x + \sin x) > (1-\tan)\ln\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

因此 $\ln\cos x \ge \tan x \ln\sin x \Rightarrow \cos x\ln\cos x \ge \sin x\ln\sin x \Rightarrow (\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$

▷

Example5:

设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 可导, $f(0)=0, f'(x)$单调增加 证明： $\dfrac{f(x)}{x}$ 在$(0,+\infty)$ 单调增加

◁

$$(\frac{f(x)}{x})' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x} > 0$$

▷

Corollary:

◁

$$\text{根据定义}\quad \text{对任意}\ x,y,z\in I\quad \text{如果}\ x<y<z,\text{那么}:\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\le\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$$\text{替换变量可得}:\quad |f(x)-f(x_0)|\le M|x-x_0|\quad M=\max(\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\frac{f(z)-f(y)}{z-y})$$

▷

洛必达法则

> *L'Hospital Rule* 洛医院，一种求取极限的简单方法，绝大数情况下可以被 *Taylor* 公式取代

[洛必达法则的证明 - 知乎 (zhihu.com)]

泰勒公式及其应用

> *Taylor Formula*——单变量微分学的顶峰

Example1:

$$\text{计算}:\quad \lim_{x\to+\infty}(x+x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right))$$

◁

$$\text{根据}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\text{的}\ Taylor\ \text{公式}:\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x+x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right))=\lim_{x\to+\infty}(x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})))=\frac{1}{2}$$

▷

Example2:

$$\text{计算}:\quad \lim_{n\to\infty}n[e(1+\frac{1}{n})^{-n}-1]$$

◁

$$\lim_{n\to\infty}n[e(1+\frac{1}{n})^{-n}-1]=\lim_{n\to\infty}n[e\times e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}-1]=\lim_{n\to\infty}n[e^{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}-1]$$
$$=\lim_{n\to\infty}n[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)]=\lim_{n\to\infty}n^2[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)]=\frac{1}{2}$$

▷

Example3:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+7x^4+2}-(ax+b))=0 \quad 求\ a,b$$

◁

$$\sqrt[5]{x^5+7x^4+2}=x(1+\frac{7x^4+2}{x^5})^{\frac{1}{5}}=x(1+\frac{1}{5}(\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})+o(\frac{1}{x}))=x+\frac{7}{5}+xo(\frac{1}{x})$$

$$因此\ a=1,\ b=\frac{7}{5}$$

▷

Example4:

$$设\ \lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2})=0 \quad 设\ f(x)\ 在\ x=0\ 处二阶可导,求\ f(0),f'(0),f''(0)$$

◁

$$根据\ Taylor\ 公式: f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

$$\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\frac{3x-\frac{9}{2}x^3+f(0)x+f'(0)x^2+\frac{1}{2}f''(0)x^3+o(x^3)}{x^3}$$

$$因为\ \lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2})=0\ 故有 f(0)=3,f'(0)=0,f''(0)=9$$

▷

Example5:

$$设\ f(x)\ \in \mathbb{C}[0,4],在\ [0,4]\ 二阶可导,f(0)=0,f(1)=1,f(4)=2 \quad 证明: \quad 存在\ \xi\ : f''(\xi)=-\frac{1}{3}$$

◁

$$根据\ f(x)\ 在\ x_0=1\ 的\ Talor\ 公式: \quad f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 \quad \xi\in[$$

$$代入\ x=0\ \Rightarrow 0=1-f'(1)+\frac{f''(\xi_1)}{2}$$

$$代入\ x=4\ \Rightarrow 2=1+3f'(1)+\frac{9}{2}f''(\xi_2)$$

$$消去\ f'(1)\ \Rightarrow 3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4 \quad 根据\ Darboux\ 定理,存在\ \xi\in(\xi_1,\xi_2): f''(\xi)=\frac{1}{4}f''(\xi_1)\ -$$

$$即\ f''(\xi)=-\frac{1}{3}$$

▷

Example6:

$$设\ f(x)\ 在(a,+\infty)上二阶可导,且\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f''(x)\ 存在$$

$$证明: \quad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=0$$

◁

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)(x+1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2} \quad \xi_1\in(x,x+1)$$
$$f(x-1)=f(x)+f'(x)(x-1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2} \quad \xi_2\in(x-1,x)$$

上式减下式 $\Rightarrow f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]}{2}$ 等式两端对 $x\to+\infty$ 取极限

$$2\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$$

又因为 $f(x+1)=f(x)+f'(x)(x+1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2} \quad \xi_1\in(x,x+1)$ 等式两端对 $x\to+\infty$取极

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}f''(\xi_1)=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f''(x)=0$$

▷

Thinking:

设 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$上 n 阶可导, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)$ 存在

证明： $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\ldots=\lim_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=0$

Example7:

设 $f(x)\in\mathbb{C}[a,b]$, 且在 (a,b) 二阶可导　$p(x)$ 是过 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 的一个线性函数

求证： 对任意 $x\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,b):p(x)-f(x)=\frac{(x-a)(b-x)}{2}f''(\xi)$

◁

根据两点式公式可以设 $p(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$ 根据 $p(x)$ 的 $Taylor$ 公式可得：

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2$$
$$f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2$$

将上述两个等式代入 $p(x)$ 中得到：$p(x)=f(x)+\frac{(b-x)(x-a)}{2}[\frac{x-a}{b-a}f''(\xi_1)+\frac{b-x}{b-a}f''(\xi_2)]$

最后根据 $Darboux$ 定理：存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2):\frac{x-a}{b-a}f''(\xi_1)+\frac{b-x}{b-a}f''(\xi_2)=f''(\xi)$

▷

Example8:

求 $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{1998个}}$ 小数点后的第999位, 第1000位, 第1006位

◁

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{1998个}}=\sqrt{\frac{1000\ldots0-1}{9}}=\sqrt{\frac{10^{1998}}{9}(1-\frac{1}{10^{1998}})}=\frac{10^{999}}{3}(1-\frac{1}{10^{1998}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{10^{999}}{3}(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{10^{1998}}+\varepsilon)\quad|\varepsilon|<10^{-2\times1998}(Taylor)$$

$$=10^{-999}\times\frac{10^{1998}}{3}(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{10^{1998}}+\varepsilon)=10^{-999}(\frac{10^{1998}}{3}-\frac{1}{6}+\eta)\quad|\eta|<\frac{1}{3}\times10^{-1998}$$

$$=10^{-999}(\frac{10^{1998}-1}{3}+\frac{1}{6}+\eta)=10^{-999}(\underbrace{333\ldots3}_{1998个}+0.16666\ldots+\eta)=\underbrace{33\ldots333}_{999个}.\underbrace{333\ldots3}_{999个}16666\ldots+1$$

$$显然第999位是3,第1000位是1,第1001位是6$$

▷

微分学复习题

Q1:

$$设\ f(x)=\begin{cases}|x| & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}\quad 证明:\ f(x)\ 不存在原函数$$

◁

$$Corollary:导函数不存在第一类间断点,由\ Lagrange\ 中值定理易证$$
$$若存在原函数\ F(x)\ 则\ F'(x)=f(x)\ 但\ F'(x)\ 有第一类间断点$$
$$注意:这里所指的第一类间断点是指可去间断点和跳跃间断点$$

▷

Q2:

$$设\ f(x)=|x^3|\ 证明:\ f'''(0)\ 不存在$$

◁

$$f'''(x)=\begin{cases}6 & x>0\\ -6 & x<0\end{cases}\quad 若\ f'''(0)\ 存在,不能有第一类间断点,矛盾!故\ f'''(0)\ 不存在$$

▷

Q3:

$$\sin^2x<\sin x^2\ (0<x<\sqrt{\frac{\pi}{2}})$$

◁

$$\sin x\ 在[0,\frac{\pi}{2}]\ 单调增加,当\ 1\leq x\leq\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ 时,1\leq x\leq x^2\leq\frac{\pi}{2},所以\ \sin^2x<\sin x<\sin x^2$$

$$当\ 0<x<1\ 时,0<x^2<x<1<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\quad\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin x^2}{x^2}\Rightarrow x\sin x<\sin x^2\Rightarrow\sin^2x<\sin x^2$$

▷

Q4:

$$\text{证明：}\ \sin(\tan x) < \tan(\sin x) \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

◁

$$\text{当}\ x \in [\arctan\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\ \text{时(注：}x > 0\ \text{时}\ x > \arctan x) \quad \text{因为}\ 4 + \pi^2 < 16$$

$$\text{故}\ \tan\left(\sin\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}\right) > 1 \quad \text{因此}\ x \in [\arctan\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\ \text{时}\ \sin(\tan x) < 1 < \mathrm{t}$$

$$\text{当}\ x \in (0, \arctan\frac{\pi}{2})\ \text{时} \quad 0 < \tan x < \frac{\pi}{2} \quad \text{令}\ f(x) = \tan(\sin x) - \sin(\tan x)$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - \frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(\sin x)\cos^2 x}(\cos^3 x - \cos(\tan x)\cos^2(\sin x))$$

$$\text{其中}\ \cos(\tan x)\cos^2(\sin x) \leq (\frac{\cos(\tan x) + \cos(\sin x) + \cos(\sin x)}{3})^3 \quad (\text{均值不等式})$$

$$\leq \cos^3(\frac{\tan x + 2\sin x}{3}) \quad (Jensen\ \text{不等式}) < \cos^3 x \quad (\text{注：}\tan x + 2\sin x > 3x)$$

$$\text{因此}\ f'(x) > 0, \text{又因为}\ f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad (0 < x < \arctan\frac{\pi}{2})$$

$$\text{综上所述}\ \sin(\tan x) < \tan(\sin x) \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

▷

Q5:

$$\text{设}\ f(x)\ \text{在}\ (a,b)\ \text{可导,}\ \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty \quad \text{且当}\ x \in (a,b)\ \text{时}\ f'(x) + f^2(x) \geq -$$

$$\text{证明：}\ b - a \geq \pi$$

◁

$$\frac{d(\arctan f(x) + x)}{dx} = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} + 1 \geq 0 \quad \text{因此}\ \arctan f(x) + x\ \text{在}\ (a,b)\ \text{单调增加}$$

$$\text{所以}\ \frac{\pi}{2} + a \leq -\frac{\pi}{2} + b \Rightarrow b - a \geq \pi \quad (f(x) = \cot x \quad a = 0, b = \pi\ \text{取等})$$

▷

Q6:

$$\text{证明：}\ (\sin x)^{1-\cos 2x} + (\cos x)^{1+\cos 2x} \geq \sqrt{2} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

◁

$$\text{我们知道：}1 - \cos x = 2\sin^2 x, 1 + \cos x = 2\cos^2 x\ \text{所以问题等价于证明：}\ (\sin^2 x)^{\sin^2 x} + (\cos^2 x)^{\cos}$$

$$\text{令}\ f(x) = x^x, x \in (0,1) \quad f'(x) = x^x(\ln x + 1) \quad f''(x) = x^x(\ln x + 1)^2 + \frac{x^x}{x} > 0$$

$$\text{所以}\ f(x)\ \text{是在}\ (0,1)\ \text{的下凸函数}$$

$$\text{根据}\ Jensen\ \text{不等式：}\frac{(\sin^2 x)^{\sin^2 x} + (\cos^2 x)^{\cos^2 x}}{2} \geq \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}$$

▷

Q7:

$$\text{证明：} x-\frac{1}{x}<2\ln x \quad (0<x<1)$$
$$x-\frac{1}{x}>2\ln x \quad (x>1)$$

◁

$$\text{令 } f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x, f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=(1-\frac{1}{x})^2>0 \quad f(1)=0$$
$$\text{因此 } x-\frac{1}{x}<2\ln x \quad (0<x<1)$$
$$x-\frac{1}{x}>2\ln x \quad (x>1)$$
$$\text{在上述不等式中令 } x=\sqrt{t}, t>0, t\neq 1 \text{ 可以得到：} \frac{\ln t}{t-1}<\frac{1}{\sqrt{t}}$$

特别地, 令 $t=x+1, x>0$, 可以得到 : $\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ 或 $\ln^2(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x(x+1)}$

▷

Q8:

求对任意正整数 n 使得不等式 $\quad (1+\dfrac{1}{n})^{n+\alpha}\leq e\leq(1+\dfrac{1}{n})^{n+\beta}$ 成立的 α 的最大值和 β 的最小值

◁

$$\text{不等式等价于：} \alpha\leq\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}-n \qquad \beta\geq\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} \qquad n\in\mathbb{N}^*$$

令 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})}-x \quad x\in[1,+\infty) \quad f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)\ln^2(1+\frac{1}{x})}-1>0$ (根据 $Q7$ 最后

$$\text{则 } \alpha_{max}=\frac{1}{\ln 2}-1 \quad \beta_{min}=\lim_{n\to\infty}f(n)=\frac{1}{2}$$

▷

Q9:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在}(a,b) \text{ 有二阶导数, } \lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$
$$\text{证明：1. 存在 } x_n\in(a,+\infty): \lim_{n\to\infty}x_n=+\infty, \lim_{n\to\infty}f'(x_n)=0$$
$$\text{2. 存在 } \xi\in(a,+\infty): f''(\xi)=0$$

◁

1. 由 $Lagrange$ 中值定理 : $f(a+n+1)-f(a+n)=f'(x_n) \quad x_n \in (a+n, a+n+1) \quad n=1,$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n)=0$

2. 若不存在 $\xi \in (a,+\infty): f''(\xi)=0$, 由 $Darboux$ 定理可得 $f''(x)$ 在$(a,+\infty)$上不变号

不失一般性设 $f''(x)>0, x\in(a,+\infty)$, 则 $f'(x)$ 在$(a,+\infty)$ 严格单调增加, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n)=0 \Rightarrow f$

故 $f(x)$ 严格单调减少, 这与 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 矛盾, 故存在 $\xi\in(a,+\infty): f''(\xi)=$

▷